

アフィン変換混合ガウスモデルによる流れ場表現

衣川 昌孝[†] 藤村 友貴[†] 向川 康博[†] 佐藤慎太郎^{††} 船富 卓哉^{†,††}

[†] 奈良先端科学技術大学院大学

^{††} 東北大学

^{†††} 京都大学

あらまし 本研究は、流れ場の局所構造の時間発展をアフィン変換の群作用として直接モデル化する解析手法を提案する。従来広く用いられる手法は、空間固定の線形基底の重ね合わせとして流れ場を表現するため、強い移流や非定常な局所現象が多数のモードに拡散し、抽出と解釈が難しくなることがある。先行研究では、混合ガウスモデルを基にした局所的な相似変換の作用として渦構造のダイナミクスを抽出可能であることを示したが、剪断や異方スケールを扱えない表現制約、逐次最適化による誤差蓄積といった課題が残っていた。本研究では、時間変化するアフィン変換を各ガウス成分で時空間的に重み付けし、合成した変換の作用として変位場を再構成することで、剪断や異方スケールを含む局所変形を表現、個々の渦構造のダイナミクスを成分ごとに解釈可能な形で抽出する。また、時系列全体での大域的最適化を導入する。シミュレーションデータによる比較検討を通じて、本手法が渦の個別分解と各成分の誘起流の可視化に有効であり、追跡の一貫性でより高い解釈性を示すことを確認する。

キーワード 混合ガウスモデル, 幾何変換, 流れ場

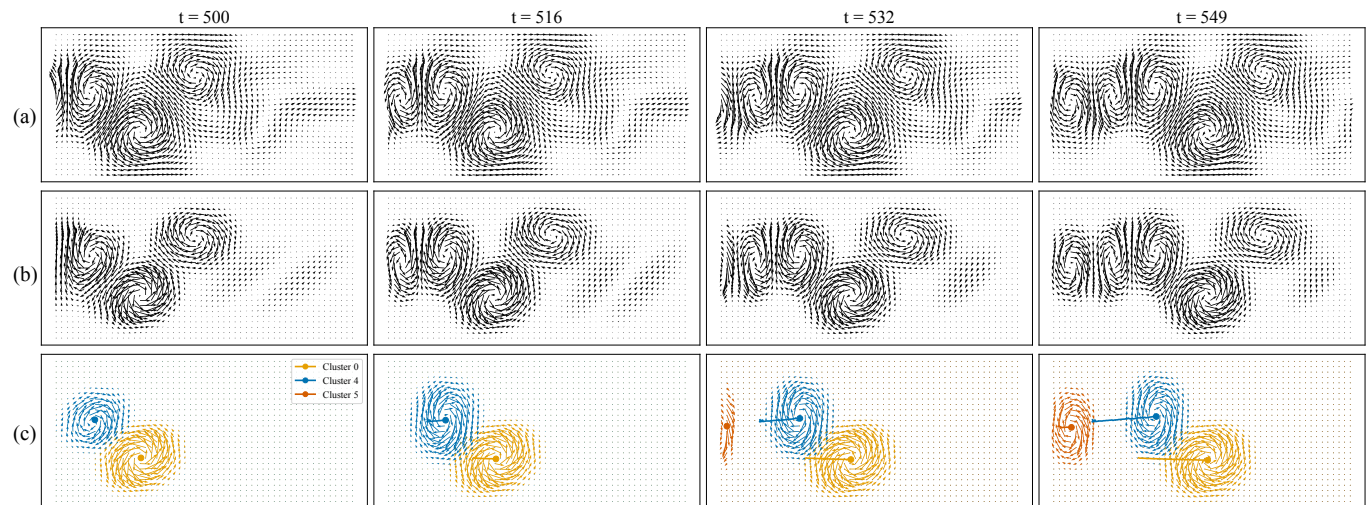


図 1: 流れ場の時間変化と提案手法による解析結果. (a) 解析対象である円柱後方のカルマン渦列の速度場. $t = 500$ から $t = 549$ までの時間変化を示している. (b) 提案したアフィン変換混合ガウスモデルによって再構成した幾何変換場の時間変化. (c) $k = 0, 4, 5$ のガウス中心の軌跡と、各ガウス成分に対応する幾何変換場. $k = 5$ のガウス成分は、途中の $t = 528$ で検出されている.

1. はじめに

近年、数値流体シミュレーションや PIV/オプティカルフロー等の高分解能計測の発展により、時系列の流れデータが大量に得られるようになった。このようなデータから、物理的に意味のある本質的構造を抽出する解析手法が求められている。乱流等の複雑流では、コヒーレントな渦構造が熱・スカラー量等の輸送を支配する主要要素である [1]。このため、渦構造は流れ場の構造的骨格としてみなされ、可視化、識別する研究が

古くから精力的に行われてきた [2]~[6]。従って、渦を基礎成分とした低次元ダイナミクスで流れを記述することは、「少数のパラメータでのデータ要約」、「渦の生成・移流・合体といった物理機構の理解」の両面で有効である。

一方で、流れ場解析の手法として従来広く用いられてきた POD [7], [8] や DMD [9]~[11] は、時間不変の空間基底展開や線形射影に基づくため、強い移流を伴う渦の局所構造は多数のモードに分散しやすく、得られたモードの物理的解釈が難しくなる場合がある [12], [13]。SPOD [13] では、時間方向のフーリ

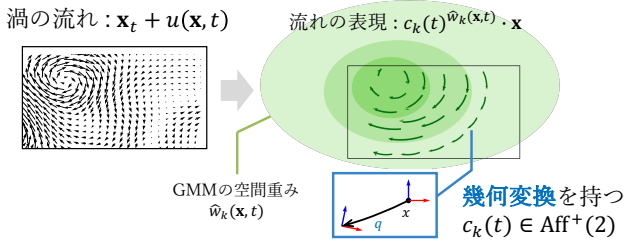


図 2: 単一のガウス成分と対応づく、局所的な幾何変換場の表現

エ変換を POD の基底に取り込むことで時空間的に定常な流れデータに対してモードの混散を緩和する。また PPOD(Permuted POD)[12] は、スナップショットを移流方向に沿って permutation してから POD を施すことで、強い移流に起因するモードの分散を低減し、移流構造を少数モードに集中的に表現している。shifted-POD[14] は、場の並進の群作用を事前に推定してスナップショットを平行移動で整列し、その後に POD を適用することで、移流の影響を緩和する。しかし、既存の POD, DMD[15] は主に並進に焦点化しており、回転・スケール変化・剪断を含む群作用を同時に推定・分解する一般枠組みは、最適化手法・同定の安定性・比較ベンチマークの観点で未整備である。

これに対し我々は、非剛体位置合わせの文脈で導入した「幾何変換場 (Geometric Transformation Field; GTF)」[16] を流れ解析へ応用し、混合ガウスモデル (GMM) と組み合わせた GM-GTF により、渦構造を「ガウス成分に重み付けされた局所幾何変換」の合成として表現し、時空間での移流・回転を解釈可能な形で抽出できることを示した[17]。ただし[17]では逐次最適化に依存しているため、時系列全体での同時最適化が課題として残った。また、相似変換 (回転・等方スケール・並進) に限定した表現では、剪断や異方スケールを含む流れの表現力に制約があった。

そこで本研究では、渦を基礎単位とする低次元表現による、強い移流下でも解釈性と要約性の高い流れ記述を実現することを目的とし、GM-GTF を相似変換群からアフィン群 (鏡映を除く) へ拡張し、剪断・異方スケールを含む局所変形まで扱える GM-GTF を提案する。さらに、渦度極値に基づく時間対応付けを初期値として用い、各ガウス成分の幾何変換と重みを時系列全体で同時最適化する枠組みを導入する。

以下ではまず、アフィン変換混合ガウスモデルの定式化と時系列全体での大域的最適化を述べ、シミュレーションによる有効性の検証実験および考察と結論を述べる。

2. アフィン変換混合ガウスモデル

本研究では、図 1(a) のように非定常に変化する流れ場の変形構造を表現するために、GMM を用いて幾何変換場を定式化する。以下では、まず一般的な GMM の枠組みを示し、 $\text{Aff}^+(2)$ の合成に基づく幾何変換場への拡張について述べる。

2.1 GMM の定式化

GMM は K 個のガウス成分を混合した確率モデルとして観

測データ \mathbf{x} の分布を表現する。

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k), \quad \pi_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^K \pi_k = 1 \quad (1)$$

ここで、 π_k は各ガウス成分の混合比、 $\boldsymbol{\mu}_k$ は平均ベクトル、 $\boldsymbol{\Sigma}_k$ は共分散行列である。

2.2 GM-GTF の定式化

幾何変換場とは、時空間中の各点で幾何変換が定義されるような場 $y(\mathbf{x}, t) \in \text{Aff}^+(2)$ である。本稿では K 個の幾何変換 $\{c_k(t)\} \in \text{Aff}^+(2)$ を考え、それぞれが $\mathcal{N}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}_k(t), \boldsymbol{\Sigma}_k(t))$ に従って時空間的に分布していると考え、これらの変換を合成することで、全体の幾何変換場をモデル化する。

GMM パラメータ $\{\boldsymbol{\mu}_k(t), \boldsymbol{\Sigma}_k(t)\}$ を用いて各変換の重みを以下の形で与える。

$$w_k(\mathbf{x}, t) = \mathcal{N}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}_k(t), \boldsymbol{\Sigma}_k(t)) \quad (2)$$

重みづけは、空間重みの最大値が 1 となるよう正規化した $\hat{w}_k(\mathbf{x}, t) = w_k(\mathbf{x}, t)/w_k(\boldsymbol{\mu}_k(t), t)$ で $c_k(t)$ のべき乗を計算することで行う。ここで、幾何変換のべき乗は $\text{Aff}^+(2)$ の指数写像 Exp と対数写像 Log を用い、以下のように計算した。

$$c_k^\alpha \equiv \text{Exp}(\alpha \text{Log}(c_k)) \quad (3)$$

図 2 は、渦が移流する流れ $\mathbf{x}_t + u(\mathbf{x}, t)$ を、単一のガウス成分からなる幾何変換場によってモデリングする概念図である。 $c_k(t)^{w_k(\mathbf{x}, t)} \cdot \mathbf{x}$ によって渦から誘起される流れの構造を幾何変換場でモデリングする。

本稿で扱う $\text{Aff}^+(2)$ を含め、幾何変換は Lie 群と呼ばれ、加法で閉じていない。そのため、GMM で用いられている線型結合の定式化をそのまま使っては幾何変換の合成を表現できない。そこで、Lie 群がなす積の演算体系で定式化する。

幾何変換を乗算で合成する場合、Lie 群が持つ非可換性が問題となりうる。乗算する順序によって合成結果が異なるが、モデル化に適切な順序は自明ではなく、全ての順列パターンを考慮すると組み合わせ爆発の問題が生じる。しかし、図 1(a) の流れ場のように局所的な構造を扱う場合、各幾何変換の成分は対応する分布の中心 $\boldsymbol{\mu}_k$ から十分に離れた領域ではほぼ恒等変換となるため、実際の影響は限定的であると考えられる。厳密には、非可換性に起因する幾何変換の差異は Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) 公式により評価することができるが、これは今後の課題とする。

以上に基づき、幾何変換場 $y(\mathbf{x})$ を以下のように定式化する。

$$y(\mathbf{x}, t) = (c_1(t))^{w_1(\mathbf{x}, t)} \cdot (c_2(t))^{w_2(\mathbf{x}, t)} \cdots (c_K(t))^{w_K(\mathbf{x}, t)} \quad (4)$$

3. 時系列全体最適化によるパラメータ推定

3.1 GMM の時間的対応づけ

時系列データに対して各フレームごとに混合ガウス分布 (GMM) を独立に推定すると、各ガウス成分の対応関係は自明ではなくなる。これは各フレームで検出される渦構造の対応

づけと本質的に問題設定が同一である。渦構造の可視化の研究 [18] では、トポロジーデータ解析を用いた渦度の極値のトラッキングによりフレーム間対応を推定する手法が提案されている。本節では、より簡潔な実装としてスカラ場（渦度場）から抽出した極値の時間追跡を用いて初期化と再ラベリングを行い、成分の時間的一貫性を担保する方法を述べる。

a) 速度場と渦度場

本研究では渦の空間構造がガウス成分であるとしてモデル化し、画像上で観測される速度場から算出される渦度場をモデル化に用いる。時系列の 2 次元流れ場を

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t)) \quad (5)$$

とすると、渦度場 $\omega(\mathbf{x}, t)$ は

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y, t) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t), \quad (6)$$

により与えられる。本研究では渦中心候補として $\omega(\mathbf{x}, t)$ の極大・極小値を取る座標を検出し、後段の成分初期化と時間対応付けに用いる。なお、検出閾値は固定値 τ とする。

b) 極値の時間対応付け

フレーム t における極値の座標集合を $X^{(t)} = \{x_i^{(t)}\}_{i=1}^{N_t}$ とする。各 $x_i^{(t)}$ に対し、次フレーム $t+1$ の候補集合 $X^{(t+1)}$ からユークリッド距離により最も近い点 $\operatorname{argmin}_{x \in X^{(t+1)}} \|x - x_i^{(t)}\|_2$ を選び、その距離が適応的探索半径

$$r_t = \alpha \cdot q_{0.95}(\{d_{NN}^{(t)}\}) \quad (7)$$

を下回る場合に限ってリンクを受理する。ここで $d_{NN}^{(t)}$ はフレーム t の点群に対するフレーム間最近傍距離の集合、 $q_{0.95}(\cdot)$ は 95 パーセンタイル、 $\alpha > 1$ は外れ値に対する安全係数である。リンクは極値の極性（極大／極小）を保持しながら一意の識別子 $p \in \mathbb{N}$ を付与し、軌跡 $\{(p, t)\}$ を形成する。なお、生成が発生した場合には、距離制約に違反したリンクは打ち切り、新規 ID の付与を行った。

c) GMM 初期化と独立推定

各フレーム t の極値の座標集合 $X^{(t)}$ から、GMM の平均 $\{\hat{\mu}_j^{(t)}\}_{j=1}^K$ の初期値を構成する。この初期値を用いて各フレームでの渦度場を GMM として推定し、推定後の平均と共分散行列 $\{\hat{\mu}_k^{(t)}, \hat{\Sigma}_k^{(t)}\}_{k=1}^K$ を得る。

d) 最適割当による再ラベリング

平均の初期値と推定値の幾何学的近接性に基づきコスト行列

$$C_{jk}^{(t)} = \|\hat{\mu}_k^{(t)} - \hat{\mu}_j^{(t)}\|_2 \quad (8)$$

を定め、置換 $\pi^{(t)}$ を最小重み完全マッチング

$$\pi^{(t)} = \operatorname{argmin}_{\pi \in S_K} \sum_{j=1}^K C_{j\pi(j)}^{(t)} \quad (9)$$

で求める。得られた $\pi^{(t)}$ に従って成分を再ラベリングすることで、極値の移流に整合した時間的一貫性を確保する。

3.2 時系列全体での大域的最適化

GM-GMM は解析的に解けないため、各種パラメータを最適

化によって解く。本手法は、時空間的に構造が移動・変形する流れ場の時間的ダイナミクスの表現として、GMM の各パラメータの時間変化をモデル化する。

時刻 t の幾何変換場として、速度場 $\mathbf{u}_{\text{obs}}(\mathbf{x}, t)$ に合うよう、パラメータ $\{\boldsymbol{\mu}_k(t), \boldsymbol{\Sigma}_k(t), c_k(t)\}$ を最適化により求める。3.1 節の実行結果から、時間的に一貫してラベリングされたガウス成分が得られているとする。最適化に用いる誤差関数は、各座標 (\mathbf{x}, t) において、式 (4) で得られる変換 $y(\mathbf{x}, t)$ によって写される座標と、変位による移動先の座標との二乗誤差を損失関数とする。

$$\mathcal{L} = \sum_t \sum_{\mathbf{x}} \|y(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{x} + \mathbf{u}_{\text{obs}}(\mathbf{x}, t))\|^2 \quad (10)$$

式 (10) を最小化するように、各パラメータ $\{\boldsymbol{\mu}_k(t), \boldsymbol{\Sigma}_k(t), c_k(t)\}$ を反復的に更新し、 $y(\mathbf{x}, t)$ を求める。

3.3 アフィン変換群がなす多様体上での最適化

$\text{Aff}^+(2)$ は非線形多様体であり、通常のユークリッド空間のように加法構造を持たないため、アフィン変換の各成分を変数として直接最適化問題を解いても、うまく収束しない。そこで、リーマン多様体上の最適化の枠組み (Manifold Optimization) に従い、アフィン変換群の接空間、すなわち Lie 代数 $\text{aff}^+(2)$ 上でパラメータを定義し、指数写像を利用した最適化を行う。具体的には、最適化変数を接空間上の元 $X \in \text{aff}^+(2)$ として定義し、これに対する勾配を求める。この勾配の指数写像を通じてアフィン変換 $c_k(t)$ を更新することで、アフィン変換群の多様体上で勾配降下法などの最適化アルゴリズムを適用できる。

アフィン変換群の Lie 代数表現

アフィン変換群 $\text{Aff}^+(2)$ は 2×2 一般線形群 $\text{GL}^+(2)$ と平行移動の半直積

$$\text{Aff}^+(2) = \text{GL}^+(2) \ltimes \mathbb{R}^2$$

として表される。任意の要素は

$$T = \begin{pmatrix} M & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M \in \text{GL}^+(2), p \in \mathbb{R}^2$$

と書ける。これに対応する Lie 代数は

$$\text{aff}^+(2) = \left\{ X = \begin{pmatrix} B & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid B \in \mathfrak{gl}(2), w \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

であり、行列の交換子によって Lie 括弧が与えられる。

指数写像と対数写像

アフィン群の Lie 代数上の指数写像は

$$\exp \begin{pmatrix} B & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^B & J(B)w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J(B) = \int_0^1 e^{sB} ds$$

で与えられる。 $J(B)$ は閉形式で

$$J(B) = (e^B - I)B^{-1} \quad (B \text{ 可逆の場合})$$

と書ける。逆に、アフィン変換 $T = \begin{pmatrix} M & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、 M の行列対数 $B = \text{Log}(M)$ を 1 つ選べば、対応する対数写像は

$$\log T = \begin{pmatrix} B & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad w = J(B)^{-1}p$$

で与えられる。

具体的な最適化手順

指数写像・対数写像はすべて PyTorch によって実装し、勾配は PyTorch の自動微分機能を利用して計算した。勾配法のアルゴリズムとしては PyTorch に実装されている Adam を用い、500 回の繰り返し処理によって各パラメータを時系列全体で同時最適化を行った。

4. 実験

本章では、上述したモデルを実際の流れ場データに適用し、GM-GTF の有効性について評価を行う。

4.1 流れ場のデータ

本実験では、シリンダー周辺での粘性 2 次元流れのシミュレーションを行った Cylinder Flow with von Karman Vortex Street [19], [20] を用いた。このデータでは、流れ場解析のテストケースとして一般的な、周期的に渦が生成・剥離していく・カルマン渦列が形成される。速度場から平均成分を引き、周期的な渦の変動成分のみを抽出した速度場の時系列変化を図 1(a) に示す。本実験では渦列が形成され、移流する様子を捉えた (160, 80) の画像領域、[500, 549] の 50 ステップを対象にした。

4.2 渦度極値追跡による GMM の初期値推定

3.1 節で示したフレームワークに従い、時間変化する渦度場に対して時系列で一貫したラベリングを持つ GMM を推定する。主要指標は α と τ の合理的な範囲に対して定性的に不変であることを確認した。フレーム間最近傍距離の集合 $\{d_{NN}^{(t)}\}$ にはツリー構造に基づく近傍探索を用い、実験では安全係数 $\alpha = 1.25$ を用いた。極値の検出には閾値 $\tau = 0.03$ を用いた。なお、実装は Python で行い、時系列リンクは Trackpy [21]、近傍探索は SciPy の k-d Tree 実装を用いた。式 (1) で表された GMM のフィッティングにおいては、渦度 $\omega(\mathbf{x}, t_0)$ の絶対値を正規化することで確率質量とみなし、その確率分布に従って取得したサンプル点群 $\{\mathbf{x}_i\}$ を入力とした。各画素における渦度の確率質量に従うように、それぞれのタイムステップで 150,000 点のランダムサンプリングを実行した。ガウス成分の数 K は、3.1 節で検出された極大値、極小値の個数である $K = 6$ を採用した。

4.3 GM-GTF による解析結果: Sim(2)

本稿では提案手法との比較対象として相似変換群 Sim(2) による流れ場解析 [17] の手法を用いる。用いたガウス成分の数は [17] に従い、 $K = 12$ とした。結果を図 3 に示す。(a) に示した速度場 $\mathbf{u}_{\text{obs}}(\mathbf{x}, t)$ に対し、再構成した幾何変換場をベクトル場に変換したもの $(y(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x})$ を (b) に示す。12 個のガウス成分を用いた幾何変換場によって再構成した流れ場の定量評価として、時間全体での MSE を算出したところ 3.66×10^{-4} であった。(c) は $k = 3, 8, 9$ に対応する、各ガウス成分の中心点 $\{\mu_k(t)\}$ の軌跡と、各ガウス成分に対応する幾何変換場の時系列変化を表している。

まず、各ガウス成分の軌跡について考察する。 $k = 8, 9$ のガウス成分の軌跡に注目すると、左から右へ流れる移流構造をうまく反映できていることがわかる。一方で、 $k = 3$ に注目すると、初期フレームでは中央部分に存在していたガウス成分が右から左へ急激に移動し、激しく折り返して動く様子が確認できる。これは $t = 530$ 付近で左領域外から流入する渦構造による流れを表現するための重みの割り当てと解釈できるが、移流構造との整合性はとれていない。

次に各ガウス成分に対応する幾何変換場について考察する。 $k = 3$ については、全てのフレームを通して単一の渦構造に対応した流れを抽出できているとは解釈できない。例えば $t = 549$ では、ガウス成分の左側を中心とする時計回り方向の大きな変換が作用しており、その他のガウス成分と合わせて流入する渦構造を表現しようとしていると解釈できる。 $k = 8, 9$ については、回転の流れを捉えられてはいるものの、 $t = 500$ では回転構造が大きく崩れていることが確認できる。また、 $k = 9$ については対応する渦構造が縦方向に歪んだ楕円形的変形で表現すべき変形を、相似変換群由来の等方的な回転で表現していることがわかる。

4.4 GM-GTF による解析結果: Aff⁺(2)

次に、提案手法である Aff⁺(2) と時系列全体での大域的最適化を用いた解析結果を図 1 に示す。図 1(a) に示した速度場 $\mathbf{u}_{\text{obs}}(\mathbf{x}, t)$ に対し、再構成した幾何変換場をベクトル場に変換したもの $(y(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x})$ を図 1(b) に示す。図から、再構成された流れ場は渦の中心付近の振る舞い・特徴をよく捉えていることが見て取れる。一方で、渦中心から離れた領域での流れの再構成は限定的であることが見て取れる。再構成した流れ場の定量的な評価指標である時系列全体での MSE は、 3.53×10^{-3} であり、Sim(2) での MSE より劣る。これはガウス成分の数に起因していると考えられる。用いた成分数が $K = 12$ である Sim(2) は主要な渦構造に対応するガウス成分以外で、周辺の渦構造以外の流れ場を表現した結果、MSE を低く抑えられていると推察される。

次に、各ガウス成分の中心点 $\{\mu_k(t)\}$ の軌跡と、各ガウス成分に対応付けられた幾何変換、式 (4) の $(c_k(t))^{u_k(\mathbf{x}, t)}$ の時系列変化を図 1(c) に示す。

まず、各ガウス成分の軌跡について考察する。 $k = 0, 4$ のガウス成分の軌跡に注目すると、Sim(2) の場合と同様に移流構造をうまく反映できている。 $k = 5$ の軌跡に注目すると、 $t = 500$ 、 $t = 516$ での軌跡は確認されず、 $t = 532$ 以降は新たに領域外左側から流入する渦構造の中心を捉えていることが確認できる。GM-GTF のフレームワークの観点では、この軌跡は $t = 528$ で新たに検出された極値と対応づいたガウス成分の移動を表している。

次に各ガウス成分に対応する幾何変換場について考察する。全てのガウス成分 $k = 0, 4, 5$ が、単一の渦構造の流れと明確に対応づいており、流れ構造が大きく崩れているフレームも存在しないことが見て取れる。また、 $k = 0$ から等方的な回転を表現でき、 $k = 4, 5$ から楕円形的な変形をアフィン変換由来の剪断成分によって表現できていることが確認できる。

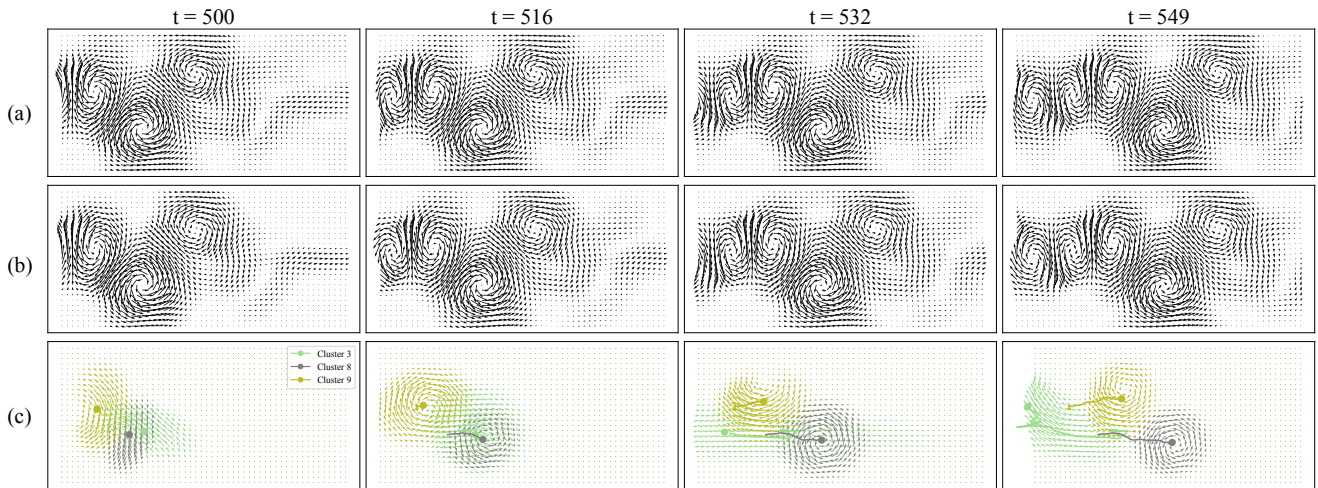


図3: 流れ場の時間変化と[17]の手法による解析結果. (a) 速度場の時間変化, (b) 再構成した速度場の時間変化, (c) いくつかのガウス成分に対応する幾何変換場.

4.5 考 察

以上の結果から, $\text{Aff}^+(2)$ へ拡張したことで, 並進・回転・スケーリングのみの表現から, 剪断も含む流れ構造を表現可能であることを示した. さらに既存手法の結果である図 3(c) の $k=3$ と, 提案手法である図 1(c) の $k=5$ の比較から, 領域内に新たな渦構造が流入した場合でも適応的にガウス成分を割り当て, 物理的整合性のある形で渦構造を抽出できることが示された.

流れ場を再構成した結果から, 比較手法に対して提案手法は, 渦中心付近の構造を明確に単一の構造に分解・抽出できることが示されている. 一般に, 流れが複雑になるにつれ, 剪断成分を有する渦構造が支配的になる. 提案手法はアフィン変換群を扱うことができるため, 剪断成分を表現可能であり, 個別の渦要素に明確に分解できることが確認できた. また, 新たな渦構造の生成にも対応できるため, 複雑な渦構造の解析にも優位性があると考えられる.

4.6 今後の課題

提案手法は, 時系列全体での大域的最適化を行うため, 渦構造の時間的対応づけを, 渦度の極値検出と最適輸送問題に帰着させている. しかし, 極値の検出は本質的にノイズに鋭敏であり, より複雑な渦が入り乱れる領域においては, 対応付けの誤りが発生する可能性がある. 今後は複雑な流れに対してもロバストに検出できるかの検証が必要である.

また, 大域的最適化への正則化項の導入も検討課題である. 共分散行列や変換の時間的連続性を適切に与えることができれば, より精度高く構造を分解できることが予想される.

5. ま と め

本研究は, 渦の局所構造をガウス成分とその幾何変換で表す GM-GTF を $\text{Sim}(2)$ から $\text{Aff}^+(2)$ へ拡張し, 移流・回転に加えて剪断や異方スケールを同時に記述・可視化できる枠組みを示した. 既存の相似変換による流れ場の分解手法[17]を基

盤に, 渦度における極値の検出・追跡に基づく時間的一貫性を持った GMM の推定と, 時系列全体の GM-GTF の大域的最適化を導入し, 逐次最適化で生じる誤差蓄積と一貫しないガウス成分の発生を抑制した. 円柱背後のカルマン渦列シミュレーションに適用した結果, 提案手法は渦中心付近の構造を各ガウス成分に明確に対応付けて抽出・追跡でき, 新規に流入する渦に対しても適応的に対応できることを示した. 一方, 渦構造を時間的に一貫した少数のガウス成分で表現することで解釈性を高めた代償として, 領域全体での流れ場の再構成精度 (MSE) は $\text{Sim}(2)$ で多成分モデルに劣る結果となった. これはガウス成分の数の設定に依存する点であると考察しているが, この改善は今後の課題である.

謝辞

本研究の一部は JST さきがけ JPMJPR2025, JST ムーンショット型研究開発事業 JPMJMS2389 の支援を受けた.

文 献

- [1] G. Haller, "Lagrangian coherent structures," Annual review of fluid mechanics, vol.47, no.1, pp.137–162, 2015.
- [2] J.C. Hunt, A.A. Wray, and P. Moin, "Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows," Studying turbulence using numerical simulation databases, 2. Proceedings of the 1988 summer program, pp.●●–●●, 1988.
- [3] J. Jeong and F. Hussain, "On the identification of a vortex," Journal of fluid mechanics, vol.285, pp.69–94, 1995.
- [4] V. Kolář, "Vortex identification: New requirements and limitations," International journal of heat and fluid flow, vol.28, no.4, pp.638–652, 2007.
- [5] J. Kasten, I. Hotz, B.R. Noack, and H.-C. Hege, "Vortex merge graphs in two-dimensional unsteady flow fields," EuroVis (Short Papers), pp.●●–●●, 2012.
- [6] T. Günther and H. Theisel, "The state of the art in vortex extraction," Computer Graphics Forum, vol.37Wiley Online Library, pp.149–173 2018.
- [7] J. Weiss, "A tutorial on the proper orthogonal decomposition," AIAA aviation 2019 forum, p.3333, 2019.
- [8] A. Chatterjee, "An introduction to the proper orthogonal decomposition," Current science, pp.808–817, 2000.
- [9] C.W. ROWLEY, I. MEZIĆ, S. BAGHERI, P. SCHLATTER, and D.S.

- HENNINGSON, "Spectral analysis of nonlinear flows," *Journal of Fluid Mechanics*, vol.641, p.115 – 127, 2009.
- [10] P.J. SCHMID, "Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data," *Journal of Fluid Mechanics*, vol.656, p.5 – 28, 2010.
- [11] J.H. Tu, "Dynamic mode decomposition: Theory and applications," PhD thesis, Princeton University, 2013.
- [12] H.M. Ek, V. Nair, C.M. Douglas, T.C. Lieuwen, and B.L. Emerson, "Permuted proper orthogonal decomposition for analysis of advecting structures," *Journal of Fluid Mechanics*, vol.930, p.A14, 2022.
- [13] O.T. Schmidt and T. Colonius, "Guide to spectral proper orthogonal decomposition," *Aiaa journal*, vol.58, no.3, pp.1023–1033, 2020.
- [14] J. Reiss, P. Schulze, J. Sesterhenn, and V. Mehrmann, "The shifted proper orthogonal decomposition: A mode decomposition for multiple transport phenomena," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol.40, no.3, pp.A1322–A1344, 2018.
- [15] E. Marensi, G. Yalmaz, B. Hof, and N.B. Budanur, "Symmetry-reduced dynamic mode decomposition of near-wall turbulence," *Journal of Fluid Mechanics*, vol.954, p.A10, 2023.
- [16] 船富卓哉, 山田重人, 藤村友貴, 櫛田貴弘, 向川康博, "幾何変換の合成に基づく変形場のスパースモデリング," 第 25 回画像の認識・理解シンポジウム (MIRU2022), p.4, 2022.
- [17] 衣川昌孝, 藤村友貴, 向川康博, 佐藤慎太郎, 船富卓哉, "混合ガウスモデルに基づいた幾何変換場による流れ場の表現," *電子情報通信学会論文誌 D*, vol.J108-D, no.10, pp.586–592, 2025.
- [18] M. Soler, M. Plainchault, B. Conche, and J. Tierny, "Lifted wasserstein matcher for fast and robust topology tracking," 2018 IEEE 8th symposium on large data analysis and visualization (LDAV)IEEE, pp.23–33 2018.
- [19] T. Günther, M. Gross, and H. Theisel, "Generic objective vortices for flow visualization," *ACM Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH)*, vol.36, no.4, pp.141:1–141:11, 2017.
- [20] S. Popinet, "Free computational fluid dynamics," *ClusterWorld*, vol.2, no.6, pp.2–8, 2004. <http://gfs.sf.net/>
- [21] D.B. Allan, T. Caswell, N.C. Keim, C.M. van derWel, and R.W. Verweij, "soft-matter/trackpy: v0.7," July 2025. <https://doi.org/10.5281/zenodo.16089574>